Chapitre 2

Titre de la note 06/11/2004

Notions de Calcul

1) Numérations Pondérées :

La base : B
Les chiffres sont : $\{0, 1, 2, \ldots, B-2, B-1\}$
Un nombre N s'écrit : $C_n \; C_{n-1} \; \ldots \; C_1 \; C_0$

La valeur de N est :

$$C_n \times B^n + C_{n-1} \times B^{n-1} + \ldots + C_0 \times B^0$$

a) Base 10 : Numération décimale :

La base :
Les chiffres sont : $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$
Un nombre N s'écrit : $C_n \; C_{n-1} \; \ldots \; C_1 \; C_0$

La valeur de N est

$$C_n \times 10^n + C_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + C_0 \times 10^0$$

Ex :

$N = 1435_{10}$ vaut $1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

b) Base 2 : Code Binaire pur ou naturel

La base : 2
Les chiffres sont : {0, 1}
Un nombre N s'écrit : $C_n \; C_{n-1} \ldots C_1 \; C_0$

La valeur de N est

$$C_n \times 2^n + C_{n-1} \times 2^{n-1} + \ldots + C_0 \times 2^0$$

Ex :

$N = 1001_2$ vaut $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
$= 8 + 1 = 9_{10}$

2) Numérations avec signe :

a) Numération binaire avec signe

La base : 2
Les chiffres sont : {0, 1}
Un nombre N s'écrit : $C_n \; C_{n-1} \ldots C_1 \; C_0$
C_n représente le signe
$C_n = 0$ Nombre positif
$C_n = 1$ Nombre négatif

Exemples :

$N = 0101_2$ vaut $1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 = +5_{10}$

$N = 1001_2$ vaut $-1 \times 2^0 = -1_{10}$

$N = 1101_2$ vaut $-1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 = -5_{10}$

↳ Que donne la somme binaire de deux nombres.

$0101_2 + 0001_2 = 0110_2$

$5_{10} + 1_{10} = 6_{10}$ ok

$1101_2 + 1001_2 = 10110_2$

$-5_{10} + -1_{10} = -6_{10}$ ok

$0101_2 + 1001_2 = 1110_2$

$5_{10} + -1_{10} = -6_{10}$ NON

$5_{10} + -5_{10}$

$\downarrow$

$0101_2 + 1101_2 = 10010_2$

$\downarrow$

-2_{10} NON

↳ La représentation des chiffres négatifs est un codage non compatible avec le calcul binaire direct. On va donc rechercher une représentation qui conduise à l'utilisation du calcul binaire direct.

$\Downarrow$

Le code Complément à B

↑

Base

b) Complément d'un chiffre en base B

<u>Définition</u> : le complément de x est le chiffre y tel que $x + y = B - 1$

<u>Ex</u> :

En base 10		En base 2	
$C(1) = 8$	$8 + 1 = 9\ (10-1)$	$C(1) = 0$	$0 + 1 = 1\ (2-1)$
$C(3) = 6$	$3 + 6 = 9\ (10-1)$	$C(0) = 1$	$0 + 1 = 1\ (2-1)$

c) Notion de nombre négatif :

Définition : le nombre $-X$ noté Y tel que

$$X + Y = 0$$

Sachant que $X + C(X) = B - 1$ alors

$$X + C(X) + 1 = B$$

Ex : $X = 1000_2$

$C(X) = 0111_2$

$1000 + 0111 + 1 = 10000$ avec $n+1$ chiffres

mais 0000 avec n chiffres

donc :

$$X + \underbrace{C(X) + 1}_{} = 0 \quad \text{sur } n \text{ chiffres}$$

↳ Complément à B de X est la représentation de $-X$

On le note

$$C_b(X)$$

b) Synthèse

- Codage d'un nombre positif

$7_{10} \rightarrow 0111_2$

- Codage d'un nombre négatif

$-7_{10} \rightarrow 1001_2$

$7_{10} \rightarrow 0111_2$

$\downarrow$ Complément

1000_2

$+ \quad 1$ Complément à 2

1001_2

- Décodage d'un nombre binaire avec signe

Si positif

$00110_2 \rightarrow 6_{10}$

Si négatif

$11110_2 \rightarrow -2_{10}$

$\downarrow$ Complément

00001_2

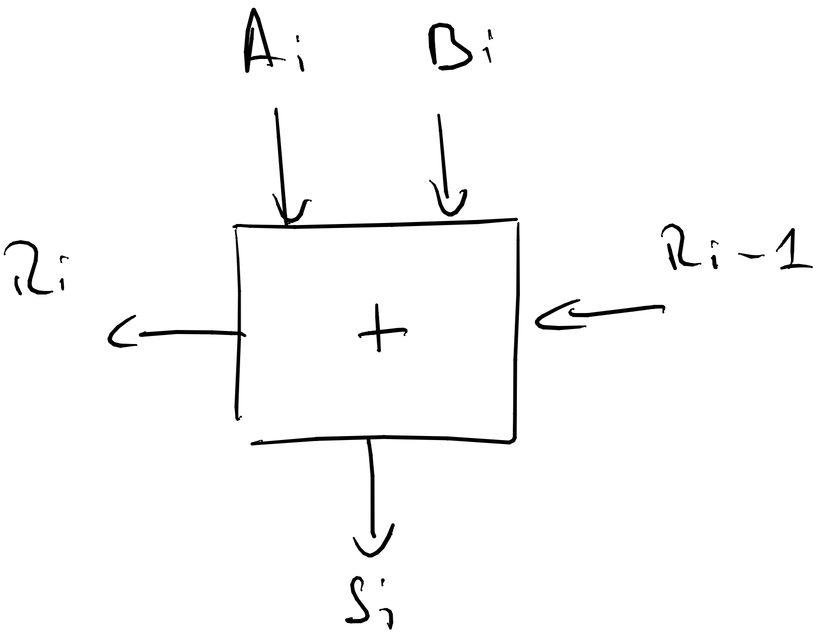
$+ \quad 1$

$00010_2 \rightarrow 2_{10}$

3) Opérateur élémentaire :

$$
\begin{array}{rccccc l}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & \rightarrow 13_{10} \\
+ & & 0 & 1 & 0 & 1 & \rightarrow 5_{10} \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \rightarrow 18_{10}
\end{array}
$$

$\Downarrow$ pour l'étage i



A_i	B_i	R_{i-1}	S_i	R_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

A_i \ $B_i R_{i-1}$	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

$$S_i = A_i\left(\overline{B_i}\,\overline{R_{i-1}} + B_i R_{i-1}\right) + \overline{A_i}\left(\overline{B_i} R_{i-1} + B_i \overline{R_{i-1}}\right)$$

$$= A_i \cdot \overline{B_i \oplus R_{i-1}} + \overline{A_i} \cdot B_i \oplus R_{i-1}$$

$$= A_i \oplus B_i \oplus R_{i-1}$$

A_i \ $B_i R_{i-1}$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$R_{i+1} = A_i B_i + \overline{A_i} B_i R_{i-1} + A_i \overline{B_i} R_{i-1}$$

$$= A_i B_i + R_{i-1}\left(A_i \overline{B_i} + \overline{A_i} B_i\right)$$

$$= A_i B_i + R_{i-1}\left(A_i \oplus B_i\right)$$